

A4 Ergänzungen zu Leitungen

Dieses Dokument enthält eine ausführlichere Fassung der Abschnitte 4.1 – 4.4 der gebundenen Fassung des Buches Nachrichtentechnik (2016). Insbesondere sind einige mathematische Herleitungen aufgeführt, auf die in der gebundenen Fassung verzichtet wurde. Sie sind mit einem **blauen Rahmen** versehen. Ferner enthält es einige zusätzliche Grafiken.

A4.1 Wellen auf leitfähigen Kabeln

In diesem Abschnitt werden elektrisch leitfähige Kabel mit einem Hin- und einem Rückleiter behandelt, die wie in Bild A4.1 gezeigt entweder als Doppel-Ader oder als Koaxial-Kabel ausgeführt sind. Dabei werden zunächst einige wichtige Kennzahlen sowie entscheidende Zusammenhänge erläutert. Konkrete Ausführungsformen sind Gegenstand von Abschnitt 4.7 des Buches.

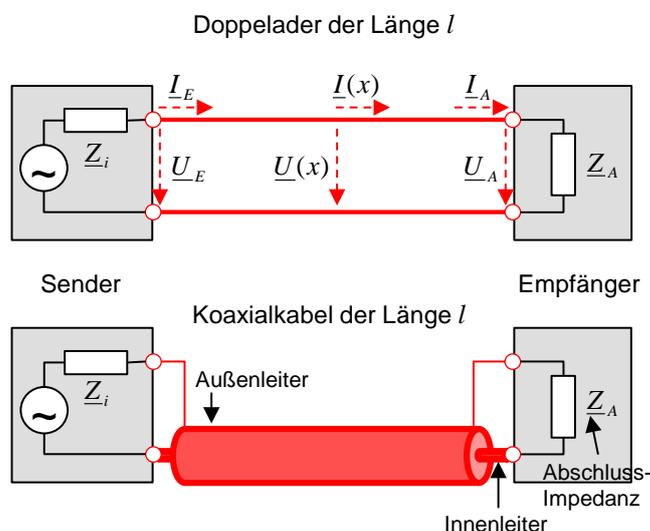


Bild A4.1: Leitung der Länge l als Doppelader oder Koaxialkabel

Ein zentraler Punkt bei Nachrichtenkabeln ist, dass die Spannung U auf dem Kabel nicht räumlich konstant ist, sondern von der Ortskoordinate x abhängt. Schaltet man beispielsweise die Spannungsquelle auf der Sender-Seite zu einem Zeitpunkt t_0 ein, so breitet sich die Spannung mit einer gewissen Geschwindigkeit auf der Leitung aus. Ebenso wird die Spannungsänderung einer Wechselspannung nicht sofort, sondern mit einer bestimmten Phasenverzögerung $\Delta\varphi = \beta \cdot x$, die proportional zur Laufstrecke x ist, weitergegeben, d.h. es breitet sich eine Welle mit der Wellenlänge λ aus.

Man bezeichnet β als **Phasenkonstante** (Einheit: m^{-1}) oder auch als **Wellenzahl**:

$$\beta = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (\text{Gl. A4.1})$$

Nach einem Laufweg von $x = \lambda$ hat sich die Phase um 2π geändert und ist damit wieder am Ausgangspunkt: $\Delta\varphi = \beta \cdot x = \beta \cdot \lambda = 2\pi$.

Im Folgenden werden „elektrisch lange Leitungen“ betrachtet, bei denen die Leitungslänge l größer als die Wellenlänge λ ist.

Räumliche Spannungsverteilung auf Leitungen

Liegt am Sender (bei $x = 0$) die Wechselspannung $u(t,0) = \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u)$ an, so hat man an einem beliebigen Punkt x bei einer nach rechts laufenden Welle die um $\Delta\varphi$ phasenverschobene Spannung:

$$u(t, x) = \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_u - \Delta\varphi) = \hat{u} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \varphi_u)$$

Bei einer realen Leitung treten Verluste (z.B. durch den ohmschen Widerstand der Leitung) auf. Diese führen zu einem exponentiellen Abfall der Amplitude der Spannung. Die nach rechts laufende bei einem Abschlusswiderstand Z_A einfallende Welle (Index h: hinlaufend) wird dann beschrieben als:

$$u_h(t, x) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\omega \cdot t - \beta \cdot x + \varphi_h) \quad (\text{Gl. A4.2})$$

Dabei bezeichnet man α (Einheit: m^{-1}) als **Dämpfungskonstante** bzw. **Dämpfungskoeffizienten**.

Zum Zeitpunkt $t_0 = -\varphi_h/\omega$ entspricht die Welle der in Bild A4.2 schwarz gezeichneten, abklingenden Cosinus-Funktion: $u_h(t_0, x) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(-\beta \cdot x) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x)$, wobei die Symmetrie der Cosinus-Funktion ausgenutzt wurde. Eine viertel Periode ($T/4$) später, also bei $t_1 = -\varphi_h/\omega + T/4$ hat man:

$$u_h(t_1, x) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\omega \cdot T/4 - \beta \cdot x) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\pi/2 - \beta \cdot x)$$

$$u_h(t_1, x) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\beta \cdot x - \pi/2) = \hat{u}_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

also die in Bild A4.2 durchgehend rot eingezeichnete, abklingende Sinus-Funktion. Noch eine viertel Periode später entspricht der Spannungsverlauf der gestrichelt gezeichneten Kurve. Die Welle hat sich dann innerhalb der halben Periodendauer $T/2$ um eine halbe Wellenlänge $\lambda/2$ nach rechts verschoben. Nach einer kompletten Periode T beträgt die Verschiebung eine komplette Wellenlänge λ .

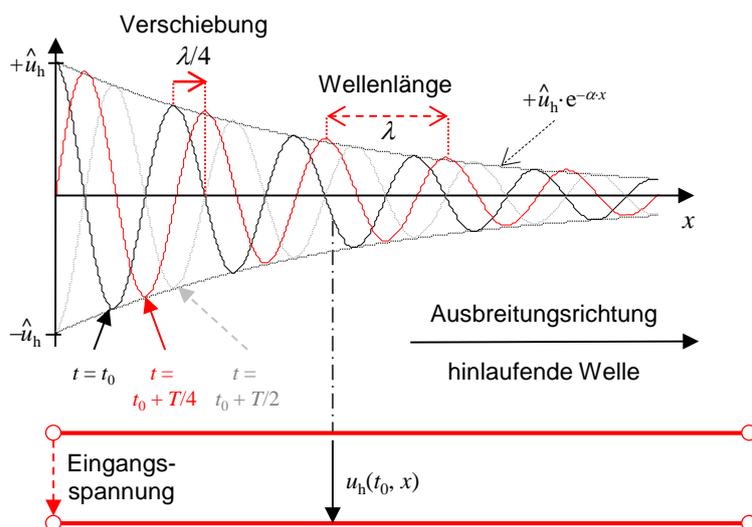


Bild A4.2: Nach rechts laufende gedämpfte Welle

Phasengeschwindigkeit der Welle

Das Verhältnis aus dieser Verschiebungsstrecke λ zur benötigten Zeit T bezeichnet man als Phasengeschwindigkeit der Welle:

$$c_p = \frac{\lambda}{T} = \lambda \cdot f = \frac{\omega}{\beta} \quad (\text{Gl. A4.3})$$

Dabei wurden die Relationen $f = 1/T$, $\omega = 2\pi/T$ und $\beta = 2\pi/\lambda$ benutzt.

Reflektierte Welle

Erreicht die Welle das Ende der Leitung, also den Abschlusswiderstand, so kann es zu einer Reflexion kommen. Die reflektierte Welle breitet sich nach links aus. Um sie mathematisch zu beschreiben, muss man in Gl.A4.2 die Größe x durch $-x$ ersetzen:

$$u_r(t, x) = \hat{u}_r \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot \cos(\omega \cdot t + \beta \cdot x + \varphi_r) \quad (\text{Gl. A4.4})$$

In komplexer Schreibweise wird aus den Gleichungen A4.2 und A4.4:

$$\underline{U}_h(x) = U_h \cdot e^{-\alpha \cdot x} \cdot e^{j(-\beta \cdot x + \varphi_h)} = U_h \cdot e^{j\varphi_h} \cdot e^{-(\alpha + j\beta) \cdot x} = U_h \cdot e^{j\varphi_h} \cdot e^{-\underline{\gamma} \cdot x} \quad (\text{Gl. A4.5})$$

$$\underline{U}_r(x) = U_r \cdot e^{+\alpha \cdot x} \cdot e^{j(+\beta \cdot x + \varphi_r)} = U_r \cdot e^{j\varphi_r} \cdot e^{+(\alpha + j\beta) \cdot x} = U_r \cdot e^{j\varphi_r} \cdot e^{+\underline{\gamma} \cdot x} \quad (\text{Gl. A4.6})$$

Ausbreitungskonstante

Dabei fasst man den Dämpfungskoeffizienten α und die Phasenkonstante β zu der komplexen Ausbreitungskonstanten $\underline{\gamma}$ zusammen:

$$\underline{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta \quad (\text{Gl. A4.7})$$

Leitungsbeläge

Um einen Zusammenhang herzustellen zwischen den zuvor eingeführten Wellengrößen und den Parametern, die die Leitung bestimmen, werden der Übersichtlichkeit halber homogene Leitungen betrachtet, d.h. Leitungen, deren Eigenschaften über die Leitungslänge konstant sind.

Jede Leitung besitzt eine bestimmung abhängig von der Leitergeometrie eine bestimmte Kapazität und Induktivität, deren Werte proportional zur Länge l der Leitung sind. Aus diesen bildet man die Größen:

- Kapazitätsbelag (Kapazität pro Länge): $C' = C / l$ (Einheit: F/m = A·s / (V·m))
- Induktivitätsbelag (Induktivität pro Länge): $L' = L / l$ (Einheit: H/m = V·s / (A·m))

Ebenso sind die Verluste proportional zur Leitungslänge. Diese entstehen durch den ohmschen Widerstand R der Kabel sowie durch unvollständige Isolation zwischen den beiden Kabeln, die man durch einen Leitwert G charakterisieren kann. Die jeweiligen Größen pro Längeneinheit nennt man:

- Widerstandsbelag: $R' = R / l$ (Einheit: $\Omega/\text{m} = \text{V} / (\text{A} \cdot \text{m})$)
- Leitwertbelag: $G' = G / l$ (Einheit: S/m = A / (V·m))

Ersatzschaltbild für eine Leitung

Zur Berechnung der Spannungsverteilung auf der Leitung veranschaulicht man sie in einem Ersatzschaltbild als eine Kette von gekoppelten gleichartigen Schwingkreisen (siehe Bild A4.3). Jeder Schwingkreis steht dabei für ein sehr kurzes Leiterstück, deren Länge Δx man gegen Null gehen lässt. Kapazität, Induktivität, ohmscher Widerstand und Leitwert des Schwingkreises berechnen sich als Produkt dieser Länge mit dem jeweiligen Belag.

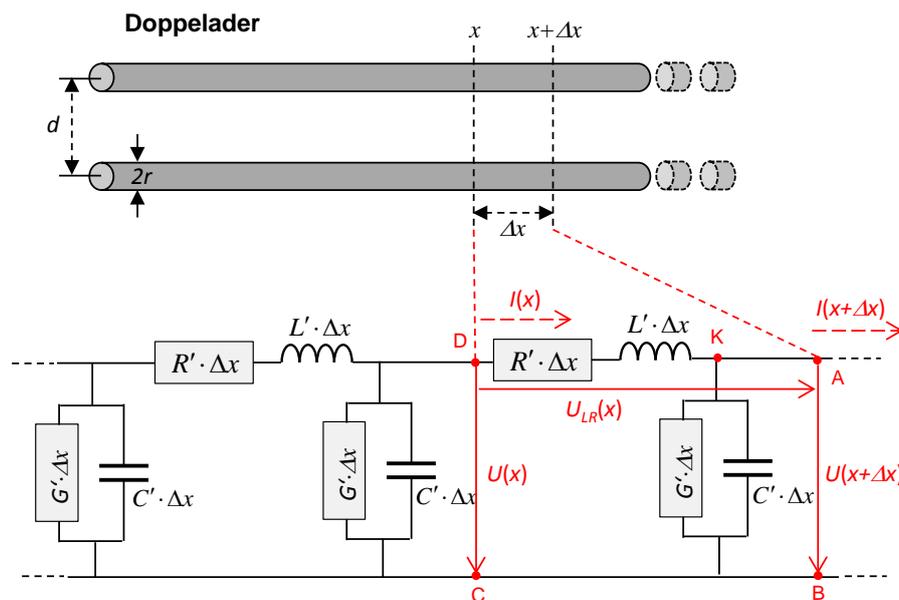


Bild A4.3: Ersatzschaltbild für eine Leitung

Herleitung der Wellengleichung für die Spannung und den resultierenden Ausbreitungskoeffizienten aus dem Ersatzschaltbild:

Betrachtet man nun einen einzelnen Schwingkreis und die ihn umgebende geschlossene Masche ($A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow D \rightarrow A$ in Bild A4.3), so erhält man mit der

$$\text{Maschenregel: } \underline{U}(x + \Delta x) + \underline{U}_{LR}(x) - \underline{U}(x) = 0 \quad (\text{Gl. A4.8})$$

Bringt man $\underline{U}_{LR}(x) = (j\omega L' + R') \cdot \Delta x \cdot \underline{I}(x)$ auf die rechte Seite und dividiert man durch Δx , so folgt:

$$\frac{\underline{U}(x + \Delta x) - \underline{U}(x)}{\Delta x} = -(j\omega L' + R') \cdot \underline{I}(x) \quad (\text{Gl. A4.9})$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ wird aus dem Differenzenquotienten die Ableitung der Spannung nach der Ortskoordinate x :

$$\frac{d\underline{U}}{dx}(x) = -(j\omega L' + R') \cdot \underline{I}(x) \quad (\text{Gl. A4.10})$$

Im zweiten Schritt wird die Knotenregel (am Knoten K in Bild A4.3) für die Ströme verwendet:

$$\underline{I}(x + \Delta x) + \underline{I}_{CG}(x) - \underline{I}(x) = 0$$

Bringt man $\underline{I}_{CG}(x) = (j\omega C' + G') \cdot \Delta x \cdot \underline{U}(x)$ auf die rechte Seite und dividiert man durch Δx , so folgt:

$$\frac{\underline{I}(x + \Delta x) - \underline{I}(x)}{\Delta x} = -(j\omega C' + G') \cdot \underline{U}(x)$$

Beim Grenzübergang $\Delta x \rightarrow 0$ wird aus dem Differenzenquotienten die Ableitung des Stromes nach der Ortskoordinate x :

$$\frac{d\underline{I}(x)}{dx} = -(j\omega C' + G') \cdot \underline{U}(x) \quad (\text{Gl. A4.11})$$

Differentiation der Gleichung A4.10 nach der Ortskoordinate x und Einsetzen der Ableitung von I nach x gemäß der Gleichung A4.11 liefert die so genannte **Wellengleichung** für die Spannung:

$$\frac{d^2 \underline{U}}{dx^2}(x) = -(j\omega L' + R') \cdot \frac{d\underline{I}}{dx}(x) \stackrel{\text{Gl. A4.11}}{=} (j\omega L' + R') \cdot (j\omega C' + G') \cdot \underline{U}(x) \quad (\text{Gl. A4.12})$$

A4.2 Wellenkenngrößen der Leitung

A4.2.1 Allgemeine Zusammenhänge

Herleitung der Formel für die komplexe Ausbreitungskonstante:

Geht man als Lösungsansatz von den hin- und rücklaufenden Wellen aus den Gleichungen A4.2 und A4.4 aus

$$\underline{U}(x) = U \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{\mp \underline{\gamma} \cdot x} \quad \text{mit } \underline{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta, \quad (\text{Gl. A4.13})$$

und setzt diesen in die Gleichung A4.12 ein (zweimaliges Differenzieren der e-Funktion reproduziert die e-Funktion und liefert einen Faktor $\underline{\gamma}^2$ als Vorfaktor, wobei $\underline{\gamma}$ die Gleichung A4.7 eingeführte komplexe Ausbreitungskonstante ist):

$$\underline{\gamma}^2 \cdot U \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{\mp \underline{\gamma} \cdot x} = (j\omega L' + R') \cdot (j\omega C' + G') \cdot U \cdot e^{j\varphi} \cdot e^{\mp \underline{\gamma} \cdot x},$$

so erhält man durch Koeffizientenvergleich für die

Komplexe Ausbreitungskonstante:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(j\omega L' + R') \cdot (j\omega C' + G')} \quad (\text{Gl. A4.14})$$

Herleitung zum Leitungswellenwiderstand:

Aus der Gleichung A4.10 – aufgelöst nach dem Strom I – ergibt sich folgender Zusammenhang zwischen Strom und Spannung auf der Leitung:

$$\underline{I}_{h/r}(x) = -\frac{1}{j\omega L' + R'} \cdot \frac{d\underline{U}_{h/r}}{dx}(x) = -\frac{\mp \underline{\gamma}}{j\omega L' + R'} \cdot \underline{U}_{h/r}(x)$$

Das Verhältnis aus hin- bzw. rücklaufender Spannung und hin- bzw. rücklaufendem Strom ist also konstant (unabhängig von x). Man nennt es den

Leitungswellenwiderstand Z_L :

$$\pm \frac{\underline{U}_{h/r}}{\underline{I}_{h/r}} = \underline{Z}_L = \frac{j\omega L' + R'}{\underline{\gamma}} = \sqrt{\frac{(j\omega L' + R')}{(j\omega C' + G')}} \quad (\text{Gl. A4.15})$$

A4.2.2 Wellenkenngrößen von verlustfreien Leitungen

Ohne jegliche Verluste ($G'=0$, $R'=0$) erhält man als Spezialfall eine rein imaginäre Ausbreitungskonstante (Dämpfungskoeffizient $\alpha = 0$ als Realteil):

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(j\omega L') \cdot (j\omega C')} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} = j \cdot \beta, \quad (\text{Gl. A4.16})$$

Mit Hilfe der Gleichung A4.3 ($c = \omega/\beta$) folgt für die

Ausbreitungsgeschwindigkeit auf einer verlustfreien Leitung

$$c = \sqrt{\frac{1}{L' \cdot C'}} \quad (\text{Gl. A4.17})$$

und den

Wellenwiderstand auf einer verlustfreien Leitung

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (\text{Gl. A4.18})$$

Die Phasengeschwindigkeit und der Leitungswellenwiderstand hängen also nur von den Kapazitäts- und Induktivitätsbelägen ab. Für einfache Leitungstypen wie Doppeladern oder Koaxialkabeln kann man diese Größen gut berechnen. Sie hängen von der Leitungsgeometrie ab sowie von:

- der elektrischen Feldkonstante $\varepsilon_0 = 8,854 \cdot 10^{-12} \text{ As/(Vm)}$,
- der magnetischen Feldkonstante $\mu_0 = 1,257 \cdot 10^{-6} \text{ Vs/(Am)}$,
- der einheitenlosen relativen Permittivität (Dielektrizitätszahl) ε_r ,
- der einheitenlosen relativen magnetischen Permittivität μ_r .

Insgesamt ergibt sich für die

Phasengeschwindigkeit auf einer Doppelader oder einem Koaxialkabel:

$$c = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \mu_r \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}} \quad (\text{Gl. A4.19})$$

Ohne dielektrische oder magnetisch wirksame Medien erhält man als Phasengeschwindigkeit auf einer Leitung die **Vakuumllichtgeschwindigkeit**:

$$c_0 = \sqrt{\frac{1}{\mu_0 \cdot \varepsilon_0}} = 3 \cdot 10^8 \frac{\text{m}}{\text{s}} = 300 \frac{\text{m}}{\mu\text{s}}$$

Ähnlich erhält man für den **Wellenwiderstand des freien Raumes (Vakuum)**:

$$Z_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}} = 377 \Omega$$

Befindet sich zwischen beispielsweise dem Innen- und Außenleiter eines Koaxialkabels ein Dielektrikum (magnetisch wirksame Materialien sind bei Leitungen i.A. nicht üblich, daher $\mu_r = 1$), so ist der Wert der Phasengeschwindigkeit geringer, und zwar um einen Betrag den man den **Verkürzungsfaktor VKF** nennt:

$$c = c_0 / \sqrt{\varepsilon_r}, \quad \text{VKF} = \sqrt{\varepsilon_r} \quad (\text{Gl. A4.20})$$

Für $\varepsilon_r = 2,25$ bzw. $\varepsilon_r = 1,25$ ergeben sich Verkürzungsfaktoren von $2/3$ bzw. $0,894$ und somit Ausbreitungsgeschwindigkeiten auf den Kabeln von $200 \text{ m}/\mu\text{s}$ bzw. $268 \text{ m}/\mu\text{s}$.

Konkrete Beispielswerte zu den obigen Größen findet man in Abschnitt 4.7 bzw. im Downloadbereich zu diesem Kapitel, einige Rechenbeispiele sind in Bild A4.4 zusammengestellt.

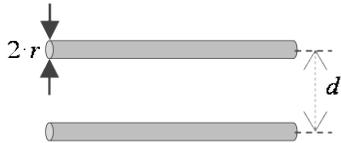
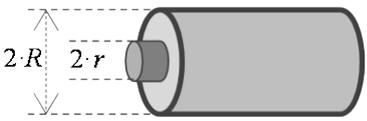
Leitungstyp	Doppelader	Koaxialkabel
Abmessungen		
Abmessungen	$r = 0,4 \text{ mm}, d = 2,4 \text{ mm}$	$R = 8,8 \text{ mm}, r = 2,2 \text{ mm}$
Materialkonstanten	$\varepsilon_r = 2,25, \mu_r = 1$	$\varepsilon_r = 1,25, \mu_r = 1$
Kapazitätsbelag	$C' = \frac{\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln(d/r)} = 35 \text{ pF/m}$	$C' = \frac{2\pi \cdot \varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r}{\ln(R/r)} = 50 \text{ pF/m}$
Induktivitätsbelag	$L' \approx \frac{\mu_0 \mu_r \cdot \ln(d/r)}{\pi} = 0,7 \text{ }\mu\text{H/m}$	$L' \approx \frac{\mu_0 \mu_r \cdot \ln(R/r)}{2\pi} = 0,28 \text{ }\mu\text{H/m}$
Ausbreitungsgeschwindigkeit	$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 200 \text{ km/ms}$	$c = \frac{c_0}{\sqrt{\varepsilon_r}} = 268 \text{ km/ms}$
Wellenwiderstand	$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{\ln(d/r)}{\pi}}$	$Z = \sqrt{\frac{L'}{C'}} = \sqrt{\frac{\mu_0 \cdot \mu_r}{\varepsilon_0 \cdot \varepsilon_r} \cdot \frac{\ln(R/r)}{2\pi}}$
Wellenwiderstand	$Z = Z_0 \cdot \frac{\ln(d/r)}{\pi \cdot \sqrt{\varepsilon_r}} = 95 \text{ }\Omega$	$Z = Z_0 \cdot \frac{\ln(R/r)}{2\pi \cdot \sqrt{\varepsilon_r}} = 75 \text{ }\Omega$

Bild A4.4: Beispielparameter für Doppelader und Koaxialkabel

A4.2.3 Wellenkenngrößen von Leitungen mit geringen Verlusten

Für schwach gedämpfte Leitungen mit verhältnismäßig geringem Widerstands- und Leitwertbelag ($R' \ll \omega L'$ und $G' \ll \omega C'$) arbeitet man ebenfalls mit dem **Leitungswellenwiderstand**:

$$Z_L = \sqrt{\frac{L'}{C'}} \quad (\text{Gl. A4.21})$$

Herleitung zur Ausbreitungskonstante und zum Dämpfungskoeffizienten bei schwach verlustbehafteten Leitungen:

Ferner folgt für die Ausbreitungskonstante γ (siehe Gleichung A4.14) aus $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ für $|x| \ll 1$ die gute Näherung:

$$\underline{\gamma} = \sqrt{(j\omega L') \cdot (j\omega C') \cdot \left(1 + \frac{R'}{j\omega L'}\right) \cdot \left(1 + \frac{G'}{j\omega C'}\right)}$$

$$\underline{\gamma} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \sqrt{\left(1 + \frac{R'}{j\omega L'} + \frac{G'}{j\omega C'} + \frac{G'}{j\omega C'} \cdot \frac{R'}{j\omega L'}\right)}$$

$$\underline{\gamma} \approx j \cdot \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \left(1 + \frac{1}{2} \cdot \frac{R'}{j\omega L'} + \frac{1}{2} \cdot \frac{G'}{j\omega C'} \right)$$

$$\underline{\gamma} = j \cdot \omega \cdot \sqrt{L' \cdot C'} \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(R' \cdot \sqrt{\frac{C'}{L'}} + G' \cdot \sqrt{\frac{L'}{C'}} \right)$$

In diesem Fall besitzt die Ausbreitungskonstante nicht nur einen Imaginärteil (die Phasenkonstante β wie im Fall ohne Verluste) sondern auch einen Realteil, den Dämpfungskoeffizienten α :

$$\underline{\gamma} = \alpha + j \cdot \beta = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R'}{Z_L} + G' \cdot Z_L \right) + j \cdot \frac{\omega}{c} \quad (\text{Gl. A4.22})$$

Dämpfungskoeffizient bei schwach verlustbehafteter Leitung:

$$\alpha = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{R'}{Z_L} + G' \cdot Z_L \right) \quad (\text{Gl. A4.23})$$

Um zu berechnen, um wie viele Dezibel die Spannung nach einer Leiterlänge l abgefallen ist, hat man folgenden Ausdruck zu betrachten, der sich aus Gleichung A4.5 ergibt und der proportional zur Leiterlänge l ist:

$$20 \cdot \log \left| \frac{U_h(x=l)}{U_h(0)} \right| = 20 \cdot \log |e^{-\alpha l}| = -l \cdot 20 \cdot \alpha \cdot \log(e) \quad (\text{Gl. A4.24})$$

Das **längenspezifische Dämpfungsmaß (Dämpfung pro Länge l)** folgt damit aus dem Dämpfungskoeffizient α als:

$$\delta = 20 \cdot \alpha \cdot \log(e). \quad (\text{Gl. A4.25})$$

Für Antennenkabel oder für Kabel zur Datenübertragung werden die Werte häufig in dB/m bzw. dB/(100 m) angegeben (siehe Abschnitt 4.7 für konkrete Werte). Die Dämpfung durch ein Kabel ist also proportional zur Länge des Kabels.

Skin-Effekt

Ferner steigt Kabeldämpfung pro Länge mit abnehmenden Durchmesser sowie mit zunehmender Frequenz – und zwar in etwa mit der Wurzel aus der Frequenz: $\delta \sim f^{1/2}$. Dies ist auf den so genannten Skin-Effekt (skin: auf Englisch „Haut“): Durch Induktionseffekte, die mit steigender Frequenz zunehmen, wird der Strom auf den äußeren Rand des Leiters verdrängt, so dass in der Mitte des Leiters kein Strom fließt.

Die (äquivalente) Leitschichtdicke d_{LS} an der Außenhaut des Leiters nimmt mit zunehmender Frequenz ab ($d_{LS} \sim 1/f^{1/2}$). Bei einer Frequenz von 1 MHz beträgt sie bei Kupfer 66 μm und bei 1 GHz nur noch gut 2 μm . Dementsprechend sinkt der effektive Leiterquerschnitt, wodurch der Widerstandsbelag R' sowie der Dämpfungskoeffizient α steigen. Um dem Skin-Effekt zu begegnen, werden folgende Verfahren angewendet:

- Beschichtung der Leiteroberflächen mit Materialien mit sehr guter Leitfähigkeit wie Silber und Gold (Oberfläche oxidiert nicht und verliert daher nicht ihre Leitfähigkeit),

- Kabel aus vielen einzelnen gegeneinander isolierten Adern bzw. Litzen zur Erhöhung der Oberfläche.

A4.3 Leitungsabschluss und Reflexionen

In diesem Abschnitt soll das Verhalten elektromagnetischer Wellen diskutiert werden, wenn sie an das Ende der Leitung gelangen. Der Einfachheit halber werden verlustfreie Leitungen betrachtet; bei Leitungen mit schwachen Verlusten treten prinzipiell die gleichen Effekte auf.

Am Ende einer Leitung mit einer Abschlussimpedanz Z_A wird im Allgemeinen ein „Teil“ der hinlaufenden Welle reflektiert. Welcher Anteil in Bezug auf die Spannungen reflektiert wird, beschreibt der Reflexionsfaktor. Dieser kann komplexwertig sein, um auch Phasenänderungen bei der Reflexion zu erfassen:

$$\text{Reflexionsfaktor: } \underline{r} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} \quad (\text{Gl. A4.26})$$

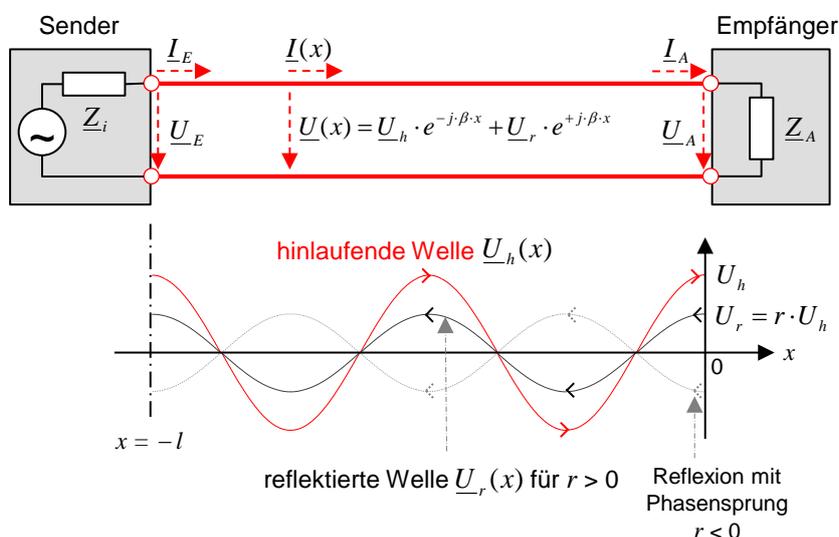


Bild A4.5: Reflexion am Abschlusswiderstand Z_A einer Leitung

Herleitung der Formel für den Reflexionsfaktor:

Um den Reflexionsfaktor zu berechnen, betrachtet man die allgemeine Spannungs- und Stromverteilung auf der Leitung, wie sie sich aus den Gleichungen A4.5 und A4.6 ergibt (Verlustfreiheit: $\alpha = 0$) und aus einem hinlaufenden (h) und rücklaufenden Teil besteht:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_h \cdot e^{-j\beta \cdot x} + \underline{U}_r \cdot e^{+j\beta \cdot x} \quad (\text{Gl. A4.27})$$

Mittels Division durch den Leitungswellenwiderstand Z_L und unter Beachtung der Vorzeichen aus Gleichung A4.15 erhält man einen ähnlichen Ausdruck für den Strom:

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_h}{Z_L} \cdot e^{-j\beta \cdot x} - \frac{\underline{U}_r}{Z_L} \cdot e^{+j\beta \cdot x} = \frac{1}{Z_L} \cdot (\underline{U}_h \cdot e^{-j\beta \cdot x} - \underline{U}_r \cdot e^{+j\beta \cdot x}) \quad (\text{Gl. A4.28})$$

Da gemäß Bild A4.5 die Abschlussimpedanz Z_A bei $x = 0$ angeordnet ist, erhält man mittels Division von Spannung und Strom an dieser Stelle (und mittels $e^0 = 1$):

$$\underline{Z}_A = \frac{\underline{U}(0)}{\underline{I}(0)} = \frac{\underline{U}_h + \underline{U}_r}{(\underline{U}_h - \underline{U}_r)/Z_L} = Z_L \cdot \frac{\underline{U}_h \cdot (1 + \underline{U}_r / \underline{U}_h)}{\underline{U}_h \cdot (1 - \underline{U}_r / \underline{U}_h)}$$

Aus der Definition des Reflexionsfaktors (Gleichung A4.26) ergibt sich:

$$\underline{Z}_A = Z_L \cdot \frac{1+r}{1-r} \quad (\text{Gl. A4.29})$$

Löst man diese Gleichung nach dem Reflexionsfaktor r auf, so erkennt man, dass der Reflexionsfaktor als Verhältnis aus rücklaufender und hinlaufender Spannung von der Differenz und der Summe aus Abschlusswiderstand Z_A und Leitungswellenwiderstand Z_L abhängt:

$$\text{Reflexionsfaktor: } \underline{r} = \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} = \frac{\underline{Z}_A - Z_L}{\underline{Z}_A + Z_L} \quad (\text{Gl. A4.30})$$

Das Betragsquadrat aus diesem Ausdruck, das Verhältnis aus rücklaufender und hinlaufender Scheinleistung S , nennt man den **Reflexionsgrad** ρ :

$$\rho = \frac{S_r}{S_h} = \left| \frac{\underline{U}_r}{\underline{U}_h} \right|^2 = |\underline{r}|^2 = \left| \frac{\underline{Z}_A - Z_L}{\underline{Z}_A + Z_L} \right|^2 \quad (\text{Gl. A4.31})$$

Für einen rein ohmschen Abschlusswiderstand $Z_A = R$ (reeller Abschlusswiderstand) ist in Bild A4.6 der Reflexionsfaktor r als Funktion des Verhältnisses aus Abschlusswiderstand und Leitungswellenwiderstand Z_L aufgetragen. Für einen reinen Blindwiderstand (imaginär) als Abschlusswiderstand ist der Betrag des Reflexionsfaktors gleich 1; es erfolgt eine vollständige Reflexion – allerdings mit einer Phasenänderung.

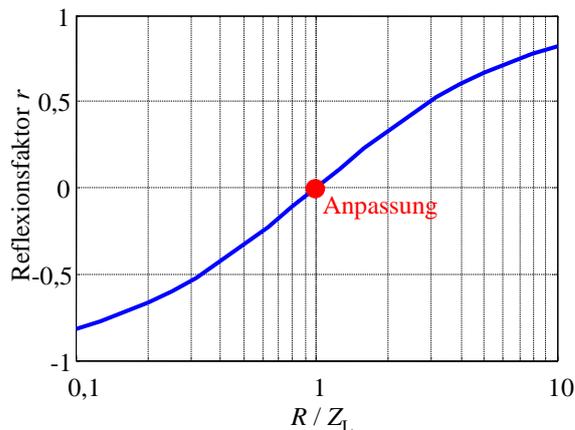


Bild A4.6: Reflexionsfaktor r als Funktion eines ohmschen Abschlusswiderstandes R

Je nach Verhältnis von Abschlusswiderstand Z_A und Leitungswellenwiderstand Z_L erhält man einige wichtige Spezialfälle für das Reflexionsverhalten. Ferner lässt sich auch die Eingangsimpedanz Z_E bestimmen, die die speisende Quelle am Anfang der Leitung sieht. Da diese gemäß der Konvention aus Bild A4.5 bei $x = -l$ liegt, muss man dafür das Verhältnis aus Spannung und Strom bei $x = -l$ bilden.

Reflexionsfreier Abschluss – Anpassung: $Z_A = Z_L$

Dies ist der erwünschte Fall für den Betrieb als Nachrichtenkabel zur Datenübertragung, da man störenden Reflexionen vermeiden möchte. Für den Abschluss der Leitung ist also eine Impedanz zu verwenden, die den gleichen Wert wie der Leitungswellenwiderstand hat.

Aus den Gleichungen A4.30 und A4.31 ergibt sich dann: $r = 0$, $\rho = 0$.

Die Welle enthält nur die hinlaufenden aber keine rücklaufenden Anteile. Stehende Wellen treten nicht auf. Für die Spannungs- und Stromverteilung erhält man aus den Gleichungen A4.27 und A4.28

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_h \cdot e^{-j\beta \cdot x}, \quad \underline{I}(x) = \frac{1}{Z_L} \cdot (\underline{U}_h \cdot e^{-j\beta \cdot x})$$

Somit folgt für die **Eingangsimpedanz** bei $x = -l$: $\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}(-l)}{\underline{I}(-l)} = Z_L$ (Gl. A4.32)

Als **Scheinleistung** tritt nur reine Wirkleistung auf: $\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = U_h^2 / Z_L$.

Kurzschluss-Abschluss: $Z_A = 0$

Aus den Gleichungen A4.30 und A4.31 ergibt sich dann: $r = -1$, $\rho = +1$.

Das Minus-Zeichen beim Reflexionsfaktor zeigt an, dass die Spannung bei der Reflexion einen Phasensprung von π bzw. 180° macht, also ihr Vorzeichen wechselt.

Die Welle enthält einen hinlaufenden und einen betragsmäßig gleich großen rücklaufenden Anteil. Für die Spannungs- und Stromverteilung erhält man aus den Gleichungen A4.27 und A4.28 mit $\underline{U}_h = \underline{U}_0$, $\underline{U}_r = -\underline{U}_0$:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_0 \cdot (e^{-j\beta \cdot x} - e^{+j\beta \cdot x}) = -2j \cdot \underline{U}_0 \cdot \sin(\beta \cdot x) \quad \text{Knoten bei } x = -\lambda/4, -3\lambda/4, -5\lambda/4, \dots$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_0}{Z_L} \cdot (e^{-j\beta \cdot x} + e^{+j\beta \cdot x}) = +2 \cdot \frac{\underline{U}_0}{Z_L} \cdot \cos(\beta \cdot x) \quad \text{Knoten bei } x = 0, -\lambda/2, -\lambda, -3\lambda/2, \dots$$

Dabei wurde der Zusammenhang (Eulersche Formel) zwischen der komplexen Exponentialfunktion und den Winkelfunktionen genutzt:

$$e^{\pm j\beta x} = \cos(\beta \cdot x) \pm j \cdot \sin(\beta \cdot x).$$

Der Betrag der Spannung und des Stroms hat also einen sinus- bzw. cosinus-förmigen Verlauf mit ortsfesten Knoten (Nullstellen) und Bäuchen (Maxima). Der Abstand zwischen zwei benachbarten Knoten ist gleich der halben Wellenlänge. Durch Vermessung des Knotenabstandes lässt sich also die Wellenlänge bestimmen. Aus der Überlagerung aus hin- und rücklaufender Welle ist also eine so genannte stehende Welle entstanden, da sich die Spannungs- und Stromverteilung nicht weiterbewegt.

Als **Eingangsimpedanz** ergibt sich ein reiner Blindwiderstand bei $x = -l$:

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}(-l)}{\underline{I}(-l)} = j \cdot Z_L \cdot \tan(\beta \cdot l), \quad \text{(Gl. A4.33)}$$

der je nach Leitungslänge kapazitiv oder induktiv sein kann. Dementsprechend ergibt sich auch für die **Scheinleistung** eine reine Blindleistung:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = -4j \cdot (U_0^2 / Z_L) \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x) \quad \text{(reine Blindleistung).}$$

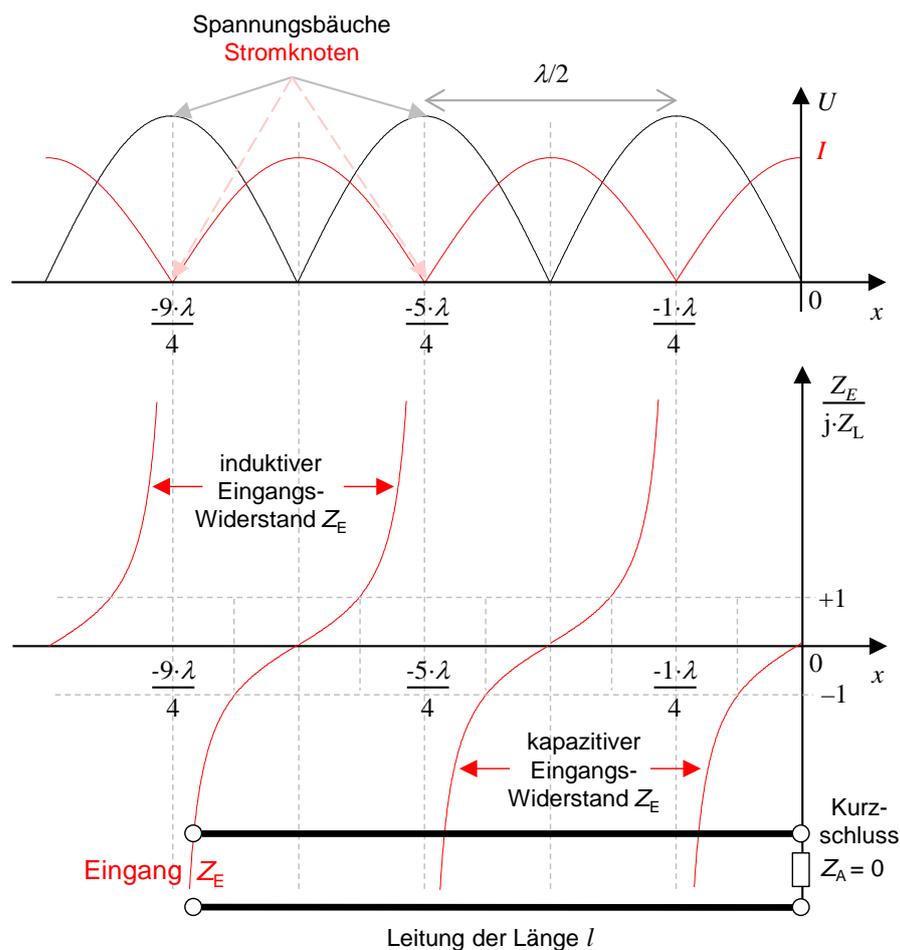


Bild A4.7: Stehende Wellen und Eingangswiderstand für eine Leitung (Beispiel Kurzschluss)

Leerlauf-Abschluss: $Z_A \rightarrow \infty$

Aus den Gleichungen A4.30 und A4.31 ergibt sich dann: $r = +1$, $\rho = +1$.

In diesem Fall ergibt sich für die Spannung bei der Reflexion kein Phasensprung, der reflektierte Anteil hat also das gleiche Vorzeichen wie der hinlaufende.

Für die Spannungs- und Stromverteilung erhält man aus den Gleichungen A4.27 und A4.28 mit $\underline{U}_h = \underline{U}_0$, $\underline{U}_r = -\underline{U}_0$:

$$\underline{U}(x) = \underline{U}_0 \cdot (e^{-j\beta x} + e^{+j\beta x}) = +2 \cdot \underline{U}_0 \cdot \cos(\beta \cdot x) \quad \text{Knoten bei } x = 0, -\lambda/2, -\lambda, -3\lambda/2, \dots$$

$$\underline{I}(x) = \frac{\underline{U}_0}{Z_L} \cdot (e^{-j\beta x} - e^{+j\beta x}) = -2j \cdot \frac{\underline{U}_0}{Z_L} \cdot \sin(\beta \cdot x) \quad \text{Knoten bei } x = -\lambda/4, -3\lambda/4, -5\lambda/4, \dots$$

Als **Eingangsimpedanz** ergibt sich ein reiner Blindwiderstand bei $x = -l$:

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}(-l)}{\underline{I}(-l)} = -j \cdot Z_L \cdot \cot(\beta \cdot l), \quad (\text{Gl. A4.34})$$

der je nach Leitungslänge kapazitiv oder induktiv sein kann.

Dementsprechend ergibt sich auch für die **Scheinleistung** eine reine Blindleistung:

$$\underline{S} = \underline{U} \cdot \underline{I}^* = +4j \cdot \left(U_0^2 / Z_L \right) \cdot \cos(\beta \cdot x) \cdot \sin(\beta \cdot x)$$

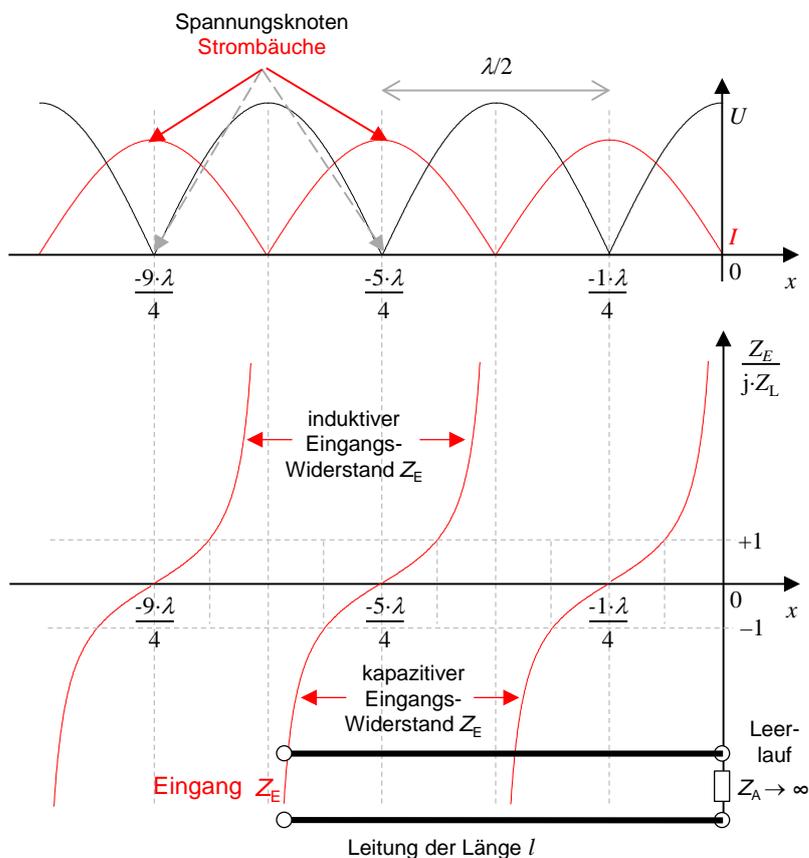


Bild A4.8: Stehende Wellen und Eingangswiderstand für eine Leitung (Beispiel Leerlauf)

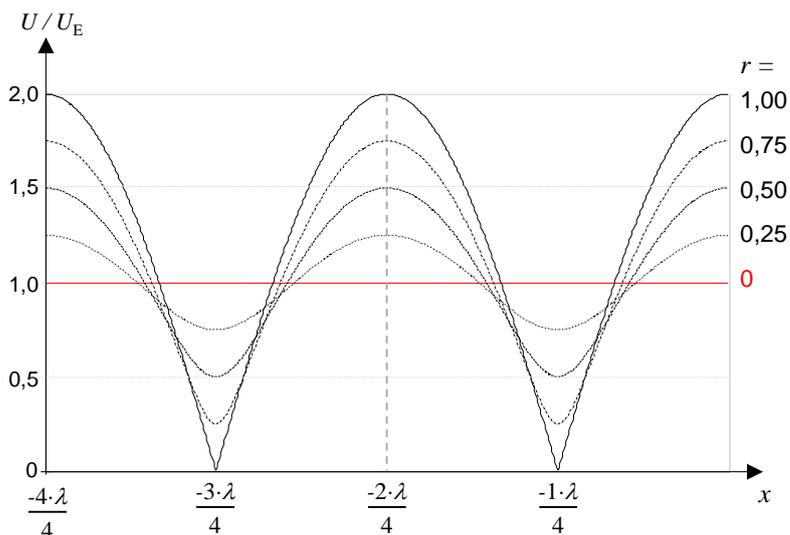


Bild A4.9: Stehende Wellen bei verschiedenen Reflexionsfaktoren

Beliebiger Abschluss: Z_A

In diesem Fall kann der Reflexionsfaktor r einen beliebigen Wert annehmen, der betragsmäßig zwischen 0 und 1 liegt. Nach der Reflexion kann sich die reflektierte Spannung mit der hinlaufenden an manchen Stellen konstruktiv und an anderen Stellen destruktiv überlagern, so dass Maxima und Minima der Gesamtspannung entstehen. Allerdings liegt der Minimalwert nicht unbedingt bei Null (siehe Bild A4.9):

$$U_{\max} = U_h + U_r = U_h(1 + r)$$

$$U_{\min} = U_h - U_r = U_h(1 - r)$$

Zu beachten ist, dass die beiden obigen Gleichungen die Beträge der jeweiligen Größen enthalten (kein Unterstrich).

Das Verhältnis aus beiden Größen nennt man das **Stehwellenverhältnis** (Voltage Standing Wave Ratio VSWR). Den Kehrwert bezeichnet man als **Anpassungsfaktor** m :

$$VSWR = \frac{U_{\max}}{U_{\min}} = \frac{1+r}{1-r} = \frac{1}{m} \quad (\text{Gl. A4.35})$$

Durch Messung von U_{\max} und U_{\min} lässt sich also der Betrag des Reflexionsfaktors bestimmen.

4.4 Leitungen als Bauelemente der Hochfrequenztechnik

Leitungen werden nicht nur zur Übertragung von Nachrichten sondern auch in Form von kurzen Leitungsstücken zur Transformation von Impedanzen oder in Resonatoren eingesetzt.

Der Effekt, der dahinter steht, wurde beispielhaft bereits im Zusammenhang mit der kurzgeschlossenen Leitung diskutiert. Abhängig von der Leitungslänge l und dem Leitungswellenwiderstand Z_L kann der reelle Abschlusswiderstand $Z_A = R_A = 0$ in einen beliebigen Eingangswiderstand transformiert werden. Diese Transformationseigenschaft lässt sich auf beliebige Impedanzen verallgemeinern. Für solche Effekte muss man nur Leitungen mit einer Länge zwischen Null und der halben Wellenlänge betrachten – eine Verlängerung der Leitung um ein Vielfaches der halben Wellenlänge führt zu dem gleichen Transformationsverhalten.

Herleitung der Gleichung für die Transformation zwischen Abschlussimpedanz und Eingangsimpedanz

Aus den Gleichungen A4.27 und A4.28 folgt für die Eingangsimpedanz \underline{Z}_E der Leitung an der Stelle $x = -l$ (siehe Bild A4.6) der folgende Ausdruck:

$$\underline{Z}_E = \frac{\underline{U}(-l)}{\underline{I}(-l)} = Z_L \cdot \frac{\underline{U}_h \cdot e^{j\beta l} + \underline{U}_r \cdot e^{-j\beta l}}{\underline{U}_h \cdot e^{j\beta l} - \underline{U}_r \cdot e^{-j\beta l}} = Z_L \cdot \frac{\underline{U}_h \cdot e^{j\beta l} + \underline{r} \cdot \underline{U}_h \cdot e^{-j\beta l}}{\underline{U}_h \cdot e^{j\beta l} - \underline{r} \cdot \underline{U}_h \cdot e^{-j\beta l}}$$

Setzt man für den Reflexionsfaktor \underline{r} gemäß Gleichung A4.30 ein und erweitert man im zweiten Schritt den Bruch mit dem Ausdruck $(\underline{Z}_A + Z_L)$, so erhält man:

$$\underline{Z}_E = Z_L \cdot \frac{e^{j\beta l} + \frac{\underline{Z}_A - Z_L}{\underline{Z}_A + Z_L} \cdot e^{-j\beta l}}{e^{j\beta l} - \frac{\underline{Z}_A - Z_L}{\underline{Z}_A + Z_L} \cdot e^{-j\beta l}} = Z_L \cdot \frac{(\underline{Z}_A + Z_L) \cdot e^{+j\beta l} + (\underline{Z}_A - Z_L) \cdot e^{-j\beta l}}{(\underline{Z}_A + Z_L) \cdot e^{+j\beta l} - (\underline{Z}_A - Z_L) \cdot e^{-j\beta l}}$$

Sortiert man jeweils im Zähler und Nenner die Terme nach dem Abschlusswiderstand und dem Wellenwiderstand und nutzt man die Eulersche Formel $e^{\pm j\beta x} = \cos(\beta \cdot x) \pm j \cdot \sin(\beta \cdot x)$, so ergibt sich folgender Ausdruck:

$$\underline{Z}_E = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}_A \cdot (e^{+j\beta l} + e^{-j\beta l}) + Z_L \cdot (e^{+j\beta l} - e^{-j\beta l})}{\underline{Z}_A \cdot (e^{+j\beta l} - e^{-j\beta l}) + Z_L \cdot (e^{+j\beta l} + e^{-j\beta l})} = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}_A \cdot 2 \cos(\beta \cdot l) + Z_L \cdot 2j \cdot \sin(\beta \cdot l)}{\underline{Z}_A \cdot 2j \cdot \sin(\beta \cdot l) + Z_L \cdot 2 \cos(\beta \cdot l)}$$

Division durch $\cos(\beta \cdot l)$ liefert als Endergebnis:

Eingangsimpedanz \underline{Z}_E als Funktion der Abschlussimpedanz \underline{Z}_A für eine Leitung der Länge l mit Leitungswellenwiderstand Z_A :

$$\underline{Z}_E = Z_L \cdot \frac{\underline{Z}_A + j \cdot Z_L \cdot \tan(\beta \cdot l)}{Z_L + j \cdot \underline{Z}_A \cdot \tan(\beta \cdot l)} \quad (\text{Gl. A4.36})$$

Für den Spezialfall einer **Leitung mit einer Länge l** , die ein **Vielfaches der halben Wellenlänge** ist, bedeutet dies, dass der die Eingangsimpedanz gleich der Abschlussimpedanz ist:

$$l = n \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \beta \cdot l = n \cdot \pi \Rightarrow \tan(\beta \cdot l) = 0 \Rightarrow \underline{Z}_E = \underline{Z}_A$$

Für den wichtigeren Fall der **Leitungen der Länge $\lambda/4$** (plus Vielfachen der halben Wellenlänge) folgt aus Gleichung A4.36:

$$l = \frac{\lambda}{4} + n \cdot \frac{\lambda}{2} \Leftrightarrow \beta \cdot l = \frac{\pi}{2} + n \cdot \pi \Rightarrow \tan(\beta \cdot l) \rightarrow \infty \Rightarrow \underline{Z}_E = \frac{Z_L^2}{\underline{Z}_A}$$

Ein wichtiger Spezialfall sind **Leitungen der Länge $\lambda/4$** . In diesem Fall vereinfacht sich das Transformationsgesetz zwischen Abschluss- und Eingangsimpedanz zu:

$$\underline{Z}_E = Z_L^2 / \underline{Z}_A \quad (\text{Gl. A4.37})$$

Eine solche Leitung der Länge $\lambda/4$ wird zu Anpassungszwecken eingesetzt. Löst man die Gleichung 4.18 nach Z_L auf, so kennt man den Wert des Wellenwiderstandes der Leitung, die man zwischen einen Eingangs- und einen Abschlusswiderstand für einen reflexionsfreien Übergang schalten muss. Er ergibt sich als geometrisches Mittel aus den beiden zu koppelnden Impedanzen:

$$Z_L = \sqrt{\underline{Z}_A \cdot \underline{Z}_E}$$

Sollen beispielsweise zwei Leitungen mit Wellenwiderständen von 50Ω und 100Ω reflexionsfrei miteinander gekoppelt werden, so benötigt man dazwischen eine Leitung der Länge $\lambda/4$ mit einem Wellenwiderstand von $Z_L = 70,7 \Omega$.

Anhand von Bild A4.7 lässt sich ebenfalls erläutern, inwiefern sich kurze Leitungsstücke als Bauelemente für Resonatoren in der Hochfrequenzeinsetzen lassen: Bei einem Abschluss mit einem Kurzschluss und einer Länge von etwas mehr als einer viertel Wellenlänge wirkt sie als induktiver Widerstand. Zusammen mit einem Kondensator entsteht ein Schwingkreis hoher Güte, denn eine Leitung ist zwar nie komplett ideal, doch ihre „ohmschen“ Verluste sind i.A. bei sehr hohen Frequenzen deutlich geringer als bei einer klassischen Spule. Eine Leitung der Länge $\lambda/4$ besitzt bei der entsprechenden Frequenz einen äußerst hohen Blindwiderstand (Höhe abhängig von den Verlusten) und zeigt damit das gleiche Verhalten wie ein Serienschwingkreis. Bei einer Länge von $\lambda/2$ wird der Blindwiderstand (nahezu) Null (siehe Bild A4.7). Die Leitung wirkt also als Parallelschwingkreis.

Das zuvor erläuterte Verhalten von kurzgeschlossenen Leitungen nutzt man für Resonatoren hoher Güte bei hohen Frequenzen.